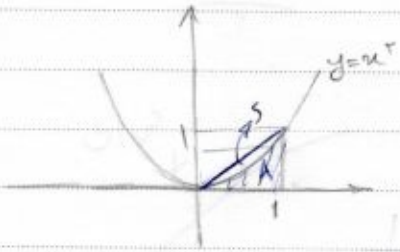
Subject

Date. Month. Year.

حسابان
- حساب دیفرانسیل ← مساله خط مماس
- حساب انتگرال ← مساحت سطح زیر منحنی

مثال:

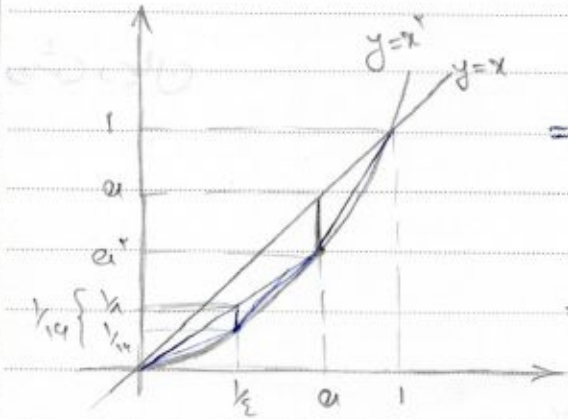


$A = ?$

$A = \frac{1}{2} \cdot S$

نگاه تاریخی:

مساحت قطاع سهمی، $\frac{4}{3}$ برابر مساحت بزرگترین مثلث محاط شده در آن است.

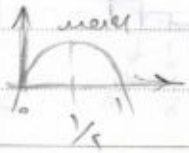


$$S_\Delta = \frac{1}{2} a (a - a^2) + \frac{1}{2}(1-a)(a-a^2)$$

$$= \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2}(1-a)\right)(a-a^2)$$

$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Max a: $a = \frac{1}{2}$

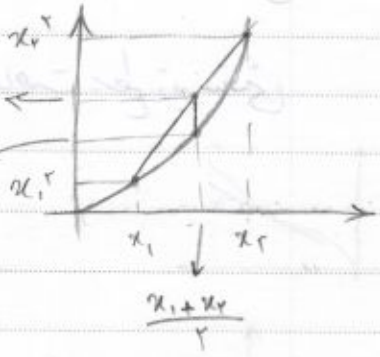


SANA

Subject

Date. Month. Year.

مساله:



$$\frac{(x_1-x_2)^2}{4} \leftarrow \begin{cases} \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \\ \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \end{cases}$$

تعداد مثلث ، قاعده

$$S_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$S_2 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

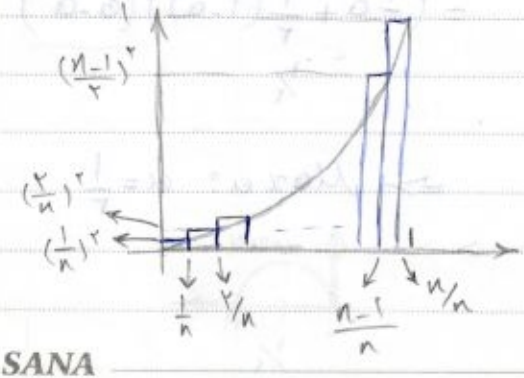
$\times 1/4$

$$S = S_1 + S_2 + \cdots = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots}_{\alpha}\Big) = \frac{1}{6}$$

$\alpha/4$

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{4} \rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

روش ریمان



Subject

Date. Month. Year.

$$S = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

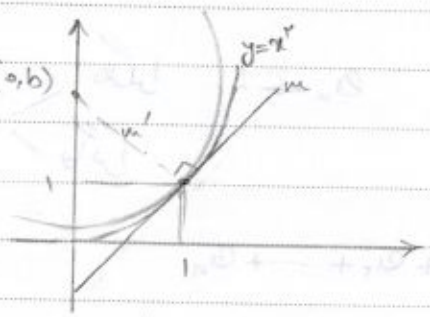
قاعده مستطیل ها

$$= \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right] = \frac{1}{n^{3}} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S \simeq \frac{n \times 2n}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

n بزرگ

روش دکارت



دایره

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-b)^2 = 1^2 + (b-1)^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$m = \frac{-1}{m'} \qquad b = 5/2$$

روش ما

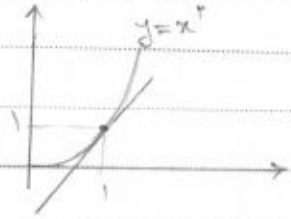
$$y - 1 = m(x-1)$$ دسته خط

$$\rightarrow \begin{cases} y = mx - m + 1 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow x^2 - mx + m - 1 = 0$$

$$\Delta = \underbrace{m^2 - 4(m-1)}_{(m-2)^2} = 0 \Rightarrow m = 2$$

تقاطع منحنی و دسته خط

$$\Rightarrow y = 2x - 1$$



SANA

Subject

Date. Month. Year.

یادآوری دامنه‌ها

n:	۱	۲	۳
a_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$

تناظر با اعداد طبیعی ← دنباله

یا

تابعی با دامنه اعداد طبیعی $a_n = f(n)$

جمله عمومی: $a_n = \frac{1}{2n+1}$

دنباله: همگرا $a_n \to L$ / واگرا

مجموعه متناهی دنباله a_n ← خودش یک دنباله است

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$a_n = n$$

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Subject

Date. Month. Year.

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \dots\right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] = \frac{3}{4}$$

امتیازی $S_n = ?$ $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

مثال: $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow a_n = ?n$

$$S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{n\left(\cancel{(n+1)-(n-1)}^{\,2}\right)}{\cancel{2}}$$

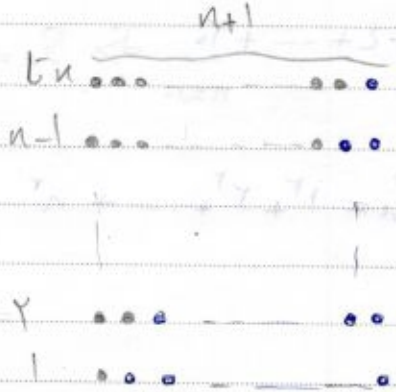
مجموعه متناهی های مهم:

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n$$

$$S_n = n + (n-1) + \dots + 1$$

$$2S_n = n(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Subject

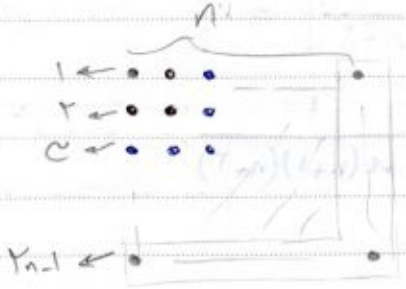
Date. Month. Year.

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

اثبات : $S_n = 1+3+\dots+(2n-1)$

$$S_n = (2n-1)+(2n-3)+\dots+3+1$$

$$2S_n = n\times 2n \Rightarrow S_n = n^2$$



مثال : $1+3+5+\dots+\underbrace{27}_{2\times(14)-1} = 14^2$

مجموع زوج

$$S_n = 2+4+\dots+2n = 2(1+2+\dots+n)$$
$$= n(n+1)$$

$$\underset{n=1}{2}+4+\dots+\underset{n=10}{20} \Rightarrow S_n = 10\times 11$$

$$S_n = 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\dots$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

اثبات:

$$n^3-(n-1)^3 = 3n^2-3n+1$$

$$(n-1)^3-(n-2)^3 = 3(n-1)^2-3(n-1)+1$$

$$2^3-1^3 = 3\times 2^2-3\times 2+1$$

$$1^3-0 = 3\times 1^2-3\times 1+1$$

$$(+) \Rightarrow n^3 = 3S_n - 3\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\dots$$

حاشیه:

$$1^k+2^k+\dots+n^k = \frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+\frac{k}{12}n^{k-1}+\dots$$

تصاعد حسابی (دنباله عددی)

$$a_n = a_{n-1}+d \rightarrow a_n = a_1+(n-1)d$$

$$a_1+a_2+\dots+a_n$$
$$a_n+a_{n-1}+\dots+a_1$$

$$2S_n = n(a_1+a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$
$$= \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

واسطه حسابی:

e a b c f

$$b = \frac{a+c}{2} = \frac{e+f}{2}$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

واسطه‌های حسابی

$$\underbrace{a \text{ ——— } b}_{m} \qquad d = \frac{b-a}{m+1}$$

قدرنسبت لازم برای درج m واسطه حسابی بین a و b

$$a_m \text{ — — } a_n \longrightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

$$a_m \quad a_n \quad a_r \quad a_s$$

$$m+n = r+s \iff a_m + a_n = a_r + a_s$$

مثال) چند جمله از دنباله ..., ۱۴, ۹, ۵ داشته باشیم تا مجموع آنها بزرگتر از ۳۰۰ شود.

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[10 + (n-1)\times 4\right]$$

$$= 5n + 2n(n-1)$$

اندیس‌ها تصاعد حسابی تشکیل بدن، خود جمله‌ها تصاعد حسابی

Subject

Date. Month. Year.

تصاعد هندسی: $a_n = a_{n-1} q \longrightarrow a_n = a_1 q^{n-1}$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$-$$

$$q S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$(1-q) S_n = a_1 (1-q^n)$$

$$q \neq 1 : \quad S_n = \frac{a_1 (1-q^n)}{1-q}$$

خواص:

① $q^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$

② واسطه هندسی $a, b, c \longrightarrow ac = b^2$

③ واسطه‌های هندسی

$a \boxed{\overset{m}{\qquad\qquad}} b$

قدر نسبت برای درج m واسطه هندسی بین a و b: $q^{m+1} = \dfrac{b}{a}$

④ $a_m \quad a_n \quad a_r \quad a_s$

$m+n = r+s \longleftrightarrow a_m a_n = a_r a_s$

$\underline{m=n} \quad n = \dfrac{r+s}{2} \qquad a_n^2 = a_r a_s$

اندیس ها تصاعد حسابی تشکیل دهند، جمله‌ها تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند.

Subject

Date. Month. Year.

مثال) $9 + 99 + __ + \overbrace{99__9}^{n\text{ تا}} = ?$

$4 + 44 + \cdots + 44__4 = ? \rightarrow S_n = 4/9(__)$

$1 + 11 + __ + 11__1 = ? \rightarrow S_n = 1/9(__)$

$(10-1) + (10^2-1) + \cdots + (10^n-1) = 10 + 10^2 + __ + 10^n - n$

$S_n = \frac{10(1-10^n)}{1-10} - n = \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

$S_n \xrightarrow{\text{همگرا}} S_\infty$ یا S

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$

حد مجموع یا مجموع نامتناهی

قضیه: اگر S_n همگرا باشد $\Leftarrow$ a_n همگرا به صفر بوده است.

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$S_\infty - S_\infty = 0$

مجموع نامتناهی تصاعد هندسی: ($|q|<1$)

مجموع تصاعد هندسی: $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

$|q|<1 \Leftrightarrow q^n \xrightarrow[n\text{ بزرگ}]{} 0 \qquad S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

Subject

Date. Month. Year.

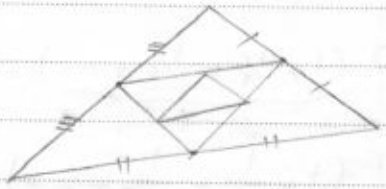
مثال) در روش ارشمیدس: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots$

$$\frac{1/4}{1-1/4} = 1/4$$

مثال) ① کسر گویای معادل $0.\overline{25}$ را به کمک مجموع تصاعد هندسی بدست آورید.

② توپی را از ارتفاع ۶ متری رها می‌کنیم، هر بار که توپ زمین می‌خورد، $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی بالا می‌رود. توپ تا زمان ایستادن، چه مسافتی را طی می‌کند؟

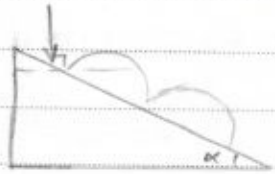
③



مجموع محیط‌های مثلث؟

مجموع مساحت‌های مثلث؟

امتیازی



$$1 - A = 0.2 + 0.025 + 0.0025 + \cdots$$

$$a_n = \frac{a_1}{1-q} \rightarrow \frac{25/1000}{99/100} = \frac{25}{990}$$

$$A = 0.2 + \frac{25}{220} = \frac{233}{990}$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

$$0,xy\overline{abc} \qquad \frac{xyabc - xy}{999..}$$

$$0,12\overline{3} = \frac{123 - 12}{900} = \frac{111}{900}$$

۲- $6 + 2(2 + 2/3 + 2/9 + \dots)$

$$A = 2 + 2/3 + 2/9 + \dots$$

$$|q| = 1/3 \rightarrow S_n = \frac{2}{1 - 1/3} = 3$$

$$\Rightarrow 6 + (3 + 2) = 12 \text{ m}$$

۳- $P.\underbrace{(1 + 1/2 + 1/4 + \dots)}_{2} = 2P.$

$$S.\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = 4/3\, S.$$

در تصاعد هندسی : $\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$

$$\frac{S_{2n} = \frac{(1 - q^{2n}) \times a_1}{1 - q}}{S_n = \frac{(1 - q^n) \times a_1}{1 - q}} = \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^n} = \frac{(1 + q^n)(1 - q^n)}{1 - q^n} = 1 + q^n$$

در تصاعد حسابی : $S_{2n} - 2S_n = n^2 d$

$$\cancel{2}n/\cancel{2}\left[2a_1 + (2n - 1)d\right] - \cancel{2}\left(n/\cancel{2}\left[2a_1 + (n - 1)d\right]\right)$$

Subject

Date. Month. Year.

$= \cancel{2a_1 n} + nd(2n-1) - \cancel{2a_1 n} - nd(n-1)$

$= nd(\cancel{2n} - \cancel{1} - \cancel{n} + \cancel{1}) = n^2 d$

امتیازی: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ باشند و a و x_1 و x_2 و b تشکیل یک تصاعد هندسی دهند ← a و b را بیابید

چند جمله‌ای:

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری:

درجه یک جمله‌ای

یک جمله‌ای یک متغیره ax^{n} $n \in W$ $a \in R$

چند جمله‌ای ← مجموع تعدادی یک جمله‌ای یک متغیره

← درجه: بزرگترین درجه یک جمله‌ای‌ها

فرم استاندارد (بدون پرانتز، توانها نزولی)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

قضیه تقسیم در اعداد صحیح:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ -6 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & -2 \\ -6 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -7 & 2 \\ -8 & -4 \\ \hline 1 & \end{array}$$

a b q

$\rightarrow 0 \leq r < b$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

$a = bq + r$

$0 \leq r < |b|$ $\quad$ r, q منحصر بفرد.

لم باقی مانده ها

تقسیم a_1 بر b ← r_1

تقسیم a_2 بر b ← r_2

<=

① باقی مانده a_1+a_2 بر b = باقی مانده r_1+r_2 بر b

② باقی مانده a_1a_2 بر b = باقی مانده r_1r_2 بر b

اثبات:

$$\begin{cases} a_1 = bq_1 + r_1 \\ a_2 = bq_2 + r_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = b(q_1+q_2) + (r_1+r_2) \\ a_1 \times a_2 = b(\ldots) + r_1 r_2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div b} \begin{cases} (a_1+a_2) \div b = (q_1+q_2) + (r_1+r_2)/b \\ (a_1 \times a_2) \div b = (\ldots) + r_1 r_2 / b \end{cases}$$

مثال)

باقی مانده $۲۵۹ \times ۶۵ + ۲۷ \times ۱۳$ را بر ۴ محاسبه کنید.

$۶ \div ۴ = ۲ \leftarrow ۶ = ۱ \times ۳ + ۱ \times ۳$

باقی مانده $۳^{۳۰} + ۳^{۳۰}$ را بر ۷ محاسبه کنید.

$۳^{۳۰} = (۳^۳)^{۱۰} = (-۱)^{۱۰} = ۱$ $\quad$ $(۳^۳)^{۱۰} \rightarrow ۱$ $\quad$ $\frac{(۳^۳)^{۱۵}}{(۲)^{۱۵}} = (۳^۳)^۵$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

قضیه تقسیم چندجمله‌ای ها:

اگر $P(x)$ و $A(x)$ دو چندجمله‌ای باشند به طوری که $A(x) \neq 0$ (یعنی چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد.)، چندجمله‌ای های منحصر به فرد $Q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند به قسمی که یا $R(x)=0$ است یا درجه $R(x)$ از درجه $A(x)$ کمتر است و داریم:

$$\underset{\text{مقسوم}}{P(x)} = \underset{\text{خارج قسمت}}{A(x) \cdot Q(x)} + \underset{\text{باقی مانده}}{R(x)}$$

اتحاد

$$\begin{array}{l|l} P(x) & A(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

درجه خارج قسمت برابر است با درجه مقسوم منهای درجه‌ی مقسوم علیه!

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 + x - 1 & x^2 - 1 \\ \hline -\ x^3 - x & x - 3 \\ \quad 0 + 3x^2 + 2x - 1 & \\ -\ \quad -3x^2 + 3 & \\ \quad\quad 0 + 2x - 4 & \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + x - 1 = (x^2 - 1)(x - 3) + (2x - 4)$$

برای این که بفهمیم درست تقسیم یا باید دوباره ضرب کرد و به عبارت اول رسید یا باید به اندازه‌ی درجه عدد امتحان کرد و چون اتحاد است دو طرف باید برابر شوند.

$$\left.\begin{array}{l} P = AQ_1 + R_1 \\ P = AQ_2 + R_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = A(Q_1 - Q_2) + R_1 - R_2$$

$$\underbrace{A(Q_1 - Q_2)}_{\text{درجه بزرگتر مساوی درجه } A} = \underbrace{R_2 - R_1}_{\text{درجه کمتر از درجه } A} \quad \times$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q_2 \ , \ R_1 = R_2 \quad \text{منحصر به فرد}$$

SANA

Subject
Date. Month. Year.

مثال) باقی‌مانده تقسیم $x^{1395}+x-1$ بر $x-1$ (بدون تقسیم)

$$x^{1395}+x-1=(x-1)Q_{(x)}+b$$

$$x=1 \Rightarrow 1+1-1=\underbrace{0\times Q(1)}_{0}+b \Rightarrow b=1$$

مثال) باقی‌مانده x^3-3x^2+x-1 بر x^2-1 (بدون تقسیم)

$$x^3-3x^2+x-1=(x^2-1)Q_{(x)}+ax+b$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=1 \Rightarrow -3=0+a+b & b=-4 \\ x=-1 \Rightarrow -5=0+(-a)+b & a=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-4$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-11 & x-2 \\ \hline -\quad x^2-2x & x+2 \\ \hline 2x-11 & \\ -\quad 2x-4 & \\ \hline -7 \longrightarrow & \end{array}$$

چندجمله‌ای درجه صفر (ثابت)

تذکر: $P_{(x)} \leftarrow R_{(x)}=0$ بر $A_{(x)}$ بخش‌پذیر است $\Leftarrow$ تجزیه

محاسبه باقی‌مانده تقسیم $P_{(x)}$ بر $x-a$

$$P_{(x)}=(x-a)Q_{(x)}+b$$

$$x=a \Rightarrow P_{(a)}=0+b \Rightarrow b=P(a)$$

Subject

Date. Month. Year.

مثال) باقی‌مانده تقسیم x^3+7x-9 بر $x-2$؟

$b = 2^3+7\times 2-9 = 13$

- باقی‌مانده $P(x)$ بر $ax+b$ $\leftarrow$ $r = P(-b/a)$

$P(x) = (ax+b)\,Q(x)+r$

مثال) باقی‌مانده x^3+7x-9 بر $2x-1$؟

$2x-1=0 \Rightarrow x = 1/2$

$r = (\frac{1}{2})^3+7(1/2)-9 = \frac{1}{8}+\frac{28}{8}-\frac{72}{8} = \frac{-43}{8}$

دو حالت خاص مهم:

$P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است $\Leftrightarrow$ مجموع ضرایب آن برابر صفر باشد

$x=1 \rightarrow 0$

$P(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است $\Leftrightarrow$ مجموع ضرایب جملات با درجه زوج = مجموع ضرایب جملات با درجه فرد

مثال) باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب ۱ و ۳ است. باقی‌مانده بر x^2+x-2 را بدست آورید.

$\begin{cases} P(1)=1 \\ P(-2)=3 \end{cases}$ $\quad P(x) = \underbrace{(x^2+x-2)}_{(x+2)(x-1)}\,Q(x)+ax+b$

$\Rightarrow \begin{cases} -2a+b=3 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-2/3 \\ b=5/3 \end{matrix} \Rightarrow R(x) = -2/3\,x+5/3$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

قضیه: اگر $P(x)$ بر $(x-a_1)$ و $(x-a_2)$ ، $(a_1 \neq a_2)$ بخش پذیر باشد، بر $(x-a_1)(x-a_2)$ نیز بخش پذیر است.

اثبات:

$$a=b=0 \xleftarrow{\text{حکم}} P(x)=(x-a_1)(x-a_2)Q(x)+ax+b$$

$$P(a_1)=0 \longrightarrow 0=aa_1+b$$

$$P(a_2)=0 \longrightarrow \ -\ 0=aa_2+b$$

$$0=a\underbrace{(a_1-a_2)}_{\neq 0} \Rightarrow a=0 \Rightarrow b=0$$

✓ تعمیم n تایی

حالت کلی‌تر: $P(x)$ بر $\underbrace{x^2-1}_{(x-1)(x+1)}$ ، $\underbrace{x^3-1}_{(x-1)(x^2+x+1)}$ بخش پذیر باشند

$\Rightarrow P(x)$ بر $\underbrace{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}_{\text{ک.م.م دو عبارت قبل}}$ بخش پذیر است.

✓ کاربرد در تجزیه

مثال) ① نشان دهید $(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ بر $(x^2+x)(2x+1)$ بخش پذیر است.

② عبارت $x^3-6x^2-19x+24$ را تجزیه کنید.

③ چند جمله‌ای درجه سومی بنویسید که بر $(x-1)$ و $(x-2)$ و $(x-3)$ بخش پذیر باشد.

④ چند جمله‌ای درجه سومی بنویسید که باقی‌مانده آن بر $(x-1)$ و $x-2$ و $x-3$ برابر ۲ باشد.

⑤ همان ④، ضمناً بر $x-4$ نیز بخش پذیر باشد.

Subject

Date. Month. Year.

① اثبات می‌کنیم که $P(x)$ بر x ، $x+1$ ، $2x+1$ بخش‌پذیر است

$P(0) = 1^{2n} - 0^{2n} - 2\times 0 - 1 = 0$

$P(-1) = 0^{2n} - (-1)^{2n} - 2\times(-1) - 1 = -1+2-1 = 0$

$P(-1/2) = (1/2)^{2n} - (-1/2)^{2n} - 2\times\left(\frac{-1}{2}\right) - 1 = 1-1 = 0$

$\Rightarrow$ طبق قضیه قبل ، ...

② $x=1 \rightarrow 1-6\times(1)-19\times(1)+24=0$

$$\begin{array}{l|l} x^3-6x^2-19x+24 & x-1 \\ \hline -\ x^3-x^2 & x^2-5x-24 \\ \quad -5x^2-19x+24 & \\ -\ -5x^2+5x & \\ \quad -24x+24 & \\ -\ -24x+24 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$x^3-6x^2-19x+24 = (x-1)(x^2-5x-24)$

$(x-8)(x+3)$

③ $P(x) = \underbrace{(x-1)(x-2)(x-3)}_{\text{درجه } 3}\ \underbrace{Q(x)}_{a}$ درجه صفر

$= a(x-1)(x-2)(x-3) \quad a\in\mathbb{R}-\{0\}$

④ $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\underbrace{Q}_{a}+2$

$= a(x-1)(x-2)(x-3)+2 \quad a\in\mathbb{R}-\{0\}$

$P(x)-2 = a(x-1)(x-2)(x-3)$

⑤ $P(4)=0 \Rightarrow a\times 3\times 2\times 1+2=0 \Rightarrow a=\frac{-1}{3}$

Subject
Date. Month. Year.

طرح یک مشکل:

$$(x^2+1)(x^2+2) = x^4+3x^2+2$$

سوال: چطوری می‌توان باقی‌مانده $P(x)$ را بر x^2+1 محاسبه کرد؟

قضیه (لم باقی‌مانده‌ها در چندجمله‌ای‌ها)

اگر باقی‌مانده $P_1(x)$ و $P_2(x)$ بر $A(x)$ برابر $R_1(x)$ و $R_2(x)$ باشد

باقی‌مانده الف) $P_1(x) \pm P_2(x)$ بر $A(x)$، برابر $R_1(x) \pm R_2(x)$ است.

" ب) $P_1(x)P_2(x)$ بر $A(x)$، برابر باقی‌مانده $R_1(x)R_2(x)$ بر $A(x)$ است.

(در الف چون با جمع درجه افزایش نمی‌یابد => چون درجه درست است => برابر)

(در ب زیرا درجه حاصلضرب متفاوت است)

مثال) باقی‌مانده x^3+2x^2-x+5 بر $x-1$

$$(x)^3+2\times(x)^2-(x)+5$$

$x \times x$

$$1^3+2\times1^3-1+5$$

$$\begin{array}{r|l} x & x-1 \\ -\ x-1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & x-1 \\ \hline 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & x-1 \\ \hline 5 & 0 \end{array}$$

مثال) باقی‌مانده x^3+2x^2+x+5 بر x^2-1 چقدر است؟

$$x\,x^2+2x^2+x+5 = 2x+7$$

$x \quad 1 \qquad 1$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2-1 \\ -\ x^2-1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & x^2-1 \\ \hline x & 0 \end{array}$$

مثال) باقی‌مانده x^3+2x^2+x+5 بر x^2+1:

$$x\,x^2+2(x^2)+x+5 = 3$$

$-1 \qquad -1$

$$x^2 = (x^2+1)\times1-1$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

مثال) باقی مانده را بدست آورید:

الف) x^5+x+1 بر x^2+x+1

ب) $x^{100}+1$ بر x^3+1

ج) $x^{345}+2x+1$ بر x^2-x+1

الف) $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1) \Rightarrow x^3=(x^2+x+1)(x-1)+1$

$x^5+x+1=0$

$1 \quad x^3 x^2 \Rightarrow (-x-1)+x+1=0$

ب) $x^{100}=(x^3)^{33}$ $\qquad x^3 \,\big|\, \frac{x^3+1}{1}$

$\hookrightarrow (-1)^{33} \times x+1=-x+1$ $\qquad -1$

ج) $x^3=\underbrace{(x+1)(x^2-x+1)}_{x^3+1}-1$

$\underbrace{(-1)^{345}}_{-1}+2x-1=2x$

جمع بندی (حالت های خاص محاسبه باقی مانده)

الف) $P_{(x)}$ بر $ax+b$ $\leftarrow$ $ax+b=0 \rightarrow x=\frac{-b}{a} \Rightarrow r=P(-b/a)$

Subject

Date. Month. Year.

ب) $P(x)$ بر ax^2+bx+c

① $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2 \equiv \frac{-b}{a}x - \frac{c}{a}$ ← مرتب بر حسب x^2

② (امتحان نهایی) $\Delta>0$: $P = a(x-x_1)(x-x_2)Q + mx+h$

$P(x_1) = mx_1+h \ , \ P(x_2) = mx_2+h$ → دو معادله دو مجهول

ج) $P(x)$ بر ax^n+b :

$ax^n+b=0 \Rightarrow x^n \equiv \frac{-b}{a}$ ← عبارت برحسب x^n

د) $P(x)$ بر $x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1$

$$x^n = \overbrace{(x^{n-1}+\dots+1)(x-1)}^{x^n-1}+1$$

(مشابهاً $x^{n-1}-x^{n-2}+\dots-x+1$ برای n فرد)

$$\underset{n \text{ فرد}}{x^n} = \underbrace{(x^{n-1}-\dots+1)(x+1)}_{x^n+1}-1$$

عبارت را برحسب x^n مرتب کرده و بجای آن 1 (-1) قرار می‌دهیم.

اگر در نهایت
- عبارت درجه $n-2$ یا کمتر ← باقی مانده
- عبارت درجه $n-1$ شد ← $x^{n-1} = -x^{n-2} - \dots - x - 1$

مثال) باقی مانده x^6+x^2-2 بر x^2+x+1 :

$$x^6 = (x^2+x+1)(x-1)+1$$

$$\underset{+1}{(x^6)}^2 + x^2 - 2 = \underset{-x-1}{x^2} - 1 = -x-2$$

SANA

Subject
Date. Month. Year.

اتحادهای $a^n \pm b^n$

الف) $a^n - b^n$

۱) n زوج یا فرد $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

علت بخش پذیری $a = b \Rightarrow 0$

علت درستی اتحاد $a^n + a^{n-1}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}$
$- a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \dots - ab^{n-1} - b^n$

۲) برای n زوج

$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} - b^{n-1})$

علت بخش پذیری $a = -b$ $(-b)^n - b^n \begin{cases} 0 & \text{n زوج} \\ -2b^n & \text{n فرد} \end{cases}$

در ① $b \leftarrow -b \Rightarrow$ اتحاد

ب) $a^n + b^n$

۱) n فرد $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

علت بخش پذیری $a = -b \Rightarrow (-b)^n + b^n = \begin{cases} 0 & \text{n فرد} \\ 2b^n & \text{n زوج} \end{cases}$

الف ① $b \Rightarrow -b$

۲) نداریم. $a^n + b^n = (a-b)(___)$

$a = b \Rightarrow 2b \neq 0$ ✗

مثال (منزل) $x^n \pm 1$ $n = 2, 3, 4$ تمام حالت‌ها:

الف ۱

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) \rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1)$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

مثال) تجزیه کنید.

$$x^{10}+y^{15}=(x^2)^5+(y^3)^5$$
$$=(x^2+y^3)(x^8-x^6y^3+x^4y^6-x^2y^9+y^{12})$$

$$x^{18}-y^6=(x^9)^2-(y^3)^2=(x^9-y^3)(x^9+y^3)$$
$$=(x^3-y)(x^6+x^3y+y^2)(x^3+y)(x^6+x^3y+y^2)$$

مثال) اثبات کنید $2^{35}+3^{14}$ بر ۴۱ بخش پذیر است.

$$2^{35}+3^{14}=(2^5)^7+(3^2)^7=\overset{41}{(2^5+3^2)}(___)$$

مثال) باقی مانده تقسیم $x^{1995}-x^{1994}+x-1$ بر $x^6+x^5+\dots+x+1$ را بدست آورید.

$$x^7=(x-1)(x^6+\dots+1)+1$$
$$\Rightarrow x^2\underbrace{(x^7)^{199}}_{1}-x\underbrace{(x^7)^{199}}_{1}+x-1=x^2-1$$

مثال
(درمنزل)

الف ۱)

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

$x^3-1=(x-1)\underline{(x^2+x+1)}$

$\Delta: 1-4<0$

$x^4-1=(x-1)\underline{(x^3+x^2+x+1)}$

$=(x-1)\underline{(x+1)}\underline{(x^2+1)}$

مزدوج

الف ۲) n زوج

$x^2-1=(x+1)(x-1)$

$x^3-1=(x+1)(__)$ ✗

n فرد: $a=-b$: $(-1)^3-1=-2\neq 0$

$x^4-1=(x+1)\underline{(x^3-x^2+x-1)}$

$=(x+1)\underline{(x-1)}\underline{(x^2+1)}$

مزدوج

ب ۱) n فرد

$x^2+1=(x+1)(__)$ ✗

n زوج: $a=-b$: $(-1)^2+1=2\neq 0$

$x^3+1=(x+1)\underline{(x^2-x+1)}$

$\Delta: 1-4<0$

$x^4+1=(x+1)(__)$ ✗

$a=-b$: $(-1)^4+1=2\neq 0$

ب ۲) نداریم

$x^2+1=(x-1)(__)$ ✗

$a=b$: $(1)^2+1=2\neq 0$

$x^3+1=(x-1)(__)$ ✗

$a=b$: $(1)^3+1=2\neq 0$

$x^4+1=(x-1)(__)$ ✗

$a=b$: $(1)^4+1=2\neq 0$

Subject
Date. Month. Year.
SANA

Subject

Date. Month. Year.

بسط دوجمله‌ای: $(a+b)^n,\ n\in\mathbb{Z},\ a,b\in\mathbb{R}$

$n=0 \quad (a+b)^0=1$

$n=1 \quad (a+b)^1=a+b$

$n=2 \quad (a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$

$n=3 \quad (a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$

$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$

$aaa \leftarrow \binom{3}{0}$

$\binom{3}{1}$: aab, aba, baa

$\binom{3}{2}$: abb, bab, bba

حالت کلی: $(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$

$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

توجه ۱: ضرائب بسط دوجمله‌ای متقارن هستند زیرا $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

مثال: در $(a+b)^9$ ضریب a^3b^6 با ضریب a^6b^3 برابر است.

$\binom{9}{3}=\binom{9}{6}$

توجه ۲: تعداد جملات، $n+1$ تاست.

توجه ۳: شکل کلی جمله $k+1$ ام: $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad \Leftarrow$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

توجه ۴: مثلث خیام - پاسکال:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$n=0$			1			
$n=1$		1		1		
$n=2$	1		2		1	
$n=3$	1		3		3	1
$n=4$	1	4		6	4	1
⋮	⋮		⋮		⋮	

فرد خاص هست

فرد خاص نیست

انتخاب k عضو از n عضو

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

$ab^2 + 2ab^2$

$a^2b + 2a^2b$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

توجه ۵: مجموع ضرایب بسط $(a+b)^n$. (به عبارت دیگر مجموع اعداد سطر $n+1$ ام مثلث خیام - پاسکال)

روش ۱: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$

روش ۲: $a=b=1 \Rightarrow (1+1)^n = 2^n$

(برابری مسأله دوگانه شماری زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی)

SANA

Subject

Date. Month. Year.

$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\,a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}$ $\quad k_1+k_2+k_3=n$

مثال ۱) در بسط $(2a+b)^8$

الف) چند جمله وجود دارد؟ $n+1=8+1=9$

ب) ضریب a^3b^5؟ $\binom{8}{3}(2a)^3b^5=\binom{8}{3}\times 2^3\times a^3b^5$

ج) ضریب a^4b^0؟ ۰

د) مجموع ضرائب؟ 3^8

$\binom{8}{8}+\binom{8}{7}2+\dots+\binom{8}{1}2^7+\binom{8}{0}2^8$

مثال ۲) جمله مستقل از x در بسط $\left(3x^3+\frac{1}{6x^2}\right)^{25}$ را بدست آورید.

$=\frac{(18x^5+1)^{25}}{(6x^2)^{25}}$

مثال ۳) الف) حاصل $(1+\sqrt{2})^6+(1-\sqrt{2})^6$ چند است؟

ب) $[(\sqrt{2}+1)^7]=?$

۲) جمله $k+1$ ام $\binom{25}{k}(3x^3)^{25-k}\left(\frac{1}{6x^2}\right)^k$

$=(\underbrace{P}_{\text{ضریب}})\times x^{\underbrace{75-3k-2k}_{0}}$ $\quad 75-5k=0\ (15-k)$

$\Rightarrow k=15$

$\Rightarrow$ ضریب $P=\binom{25}{15}\frac{3^{10}}{6^{15}}$

۳-الف) $(1+\sqrt{2})^6+(1-\sqrt{2})^6=2\left[\underbrace{\binom{6}{0}1^6}_{1}+\underbrace{\binom{6}{2}1^4(\sqrt{2})^2}_{30}+\underbrace{\binom{6}{4}1^2(\sqrt{2})^4}_{60}+\underbrace{\binom{6}{6}\sqrt{2}^6}_{8}\right]=99\times 2=198$

ب) $[(1+\sqrt{2})^6]=197$

$\downarrow$

$198-\underbrace{(1-\sqrt{2})^6}_{-0.4}$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

ک.م.م و ب.م.م دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$

ب.م.م: بزرگترین چندجمله‌ای (از نظر درجه) که $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش پذیرند. $(P(x), Q(x))$

ک.م.م: کوچکترین چندجمله‌ای (از نظر درجه) که بر $P(x)$ و $Q(x)$ بخش پذیر است. $[P(x), Q(x)]$

★ $(a,b)[a,b]=|ab|$

روش محاسبه:

۱- $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کنید.

۲- ب.م.م: حاصل ضرب عدد اول مشترک با کمترین توان.

ک.م.م: حاصل ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با بیشترین توان

مثال ۱) ب.م.م و ک.م.م x^2-4 ، x^3-2x^2-x+2 را بدست آورید.

مثال ۲) حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{2x+1}{x^3-2x+2}-\frac{1}{x^2-2x+1}$$

① $x^2-4=(x-2)(x+2)$

$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)(x^2-1)=(x-1)(x+1)$

ب.م.م: $(x-2)^1$

ک.م.م: $(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

۲

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2x+1-x-2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

معادله درجه دو

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a \neq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \longrightarrow \begin{cases} \Delta>0 & x_1, x_2 = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ & \text{دو ریشه ساده} \\ \Delta=0 & x_1, x_2 = -b/2a \\ & \text{ریشه مضاعف} \\ \Delta<0 & \text{بدون ریشه} \end{cases}$$

توجه: اگر b زوج باشد، بهتر است ریشه ها را از رابطه زیر محاسبه کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} b=2b' \\ \Delta'=b'^2-ac \end{array}\right\} \quad x_{1,2} = \frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$$

روابط بین ریشه ها

$$ax^2+bx+c \underset{\Delta>0}{=} a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[x^2-\underbrace{(x_1+x_2)}_{S}x+\underbrace{x_1x_2}_{P}\right]$$

$$\begin{cases} P = x_1x_2 = c/a \\ S = x_1+x_2 = -b/a \end{cases}$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

$$D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \overset{\text{یا}}{=} \sqrt{S^2 - 4P}$$

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$D^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$
$$= (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2$$

مثال) اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$S = 2 \,,\, P = 1/2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = S^3 - 3PS$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \pm D(S^2 - P)$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha^2\beta^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$\alpha^2\beta^3 + \beta^2\alpha^3 = \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta) = SP^2$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \pm\sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

$$\overbrace{(\alpha^2 - 2\alpha)}^{-1/2}\overbrace{(\beta^2 - 2\beta)}^{-1/2} = 1/4$$

$$\begin{cases} 2\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \\ 2\beta^2 - 4\beta + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 1/2 = 0 \\ \beta^2 - 2\beta + 1/2 = 0 \end{cases}$$

Subject

Date. Month. Year.

$$\underline{2\alpha^2} + 4\beta = (4\alpha - 1) + 4\beta = 4(\alpha+\beta) - 1 = 4S - 1$$

تشکیل معادله درجه ۲ با ریشه‌های داده شده:

$$a(x^2 - Sx + P) = 0 \qquad P = x_1 x_2$$
$$S = x_1 + x_2$$

مثال۱) معادله با ضرایب صحیح تشکیل دهید که ریشه‌های آن:

الف) $2+\sqrt{3}$ ، $2-\sqrt{3}$ باشد.

ب) $1+\sqrt{3}$، ریشه دیگر؟ معادله؟

مثال۲) معادله‌ای با ضرایب صحیح تشکیل دهید که یک ریشه‌ی آن $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ باشد.

۱-الف) ① $S = 4,\ P = 1$

$$a(x^2 - 4x + 1) = 0 \rightsquigarrow a \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

② $x = 2 \pm \sqrt{3} \rightsquigarrow x - 2 = \pm\sqrt{3} \rightsquigarrow (x-2)^2 = 3$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 4 \rightsquigarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

۱-ب) $x = 1 + \sqrt{3} \rightsquigarrow x - 1 = \sqrt{3} \rightsquigarrow (x-1)^2 = 3$

$$\rightsquigarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightsquigarrow x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

Subject

Date. Month. Year.

$x=\sqrt{2}+\sqrt{3} \rightarrow$ درجه ۲ می شود $\rightarrow$

$x^2=5+2\sqrt{6}=5+\sqrt{24}$

$x^2-5=2\sqrt{6} \rightarrow x^4-10x^2+25=24$

$\Rightarrow x^4-10x^2+1=0 \qquad (\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3})$

قضیه: اگر ضرایب معادله‌ی درجه ۲ گویا باشند و یکی از ریشه ها $p+\sqrt{q}$ باشد $(p,q\in\mathbb{Z})$ ریشه‌ی دیگر $p-\sqrt{q}$ است.

بررسی وجود و علامت ریشه‌ها به کمک S و P

$\Delta>0 \rightarrow$

- $P>0 \xrightarrow{\text{هم‌علامت}}$ در ریشه
  - $S>0 \rightarrow$ هر دو ریشه +
  - $S=0$ ✗
  - $S<0 \rightarrow$ هر دو ریشه منفی
- $P=0 \xrightarrow{\text{یک ریشه صفر}}$
  - $S>0 \rightarrow$ یک ریشه صفر، یکی مثبت
  - $S=0$ ✗
  - $S<0 \rightarrow$ یک ریشه صفر، یکی منفی
- $P<0 \xrightarrow{x_1<0<x_2}$ دو ریشه مختلف العلامت
  - $S>0 \rightarrow |x_2|>|x_1|$
  - $S=0 \rightarrow$ دو ریشه قرینه
  - $S<0 \rightarrow |x_1|>|x_2|$

$\Delta=0 \rightarrow$ ریشه مضاعف $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ $(\Rightarrow P>0)$

- $S>0$ ریشه مضاعف +
- $S=0$ ریشه مضاعف صفر
- $S<0$ ریشه مضاعف منفی

$\Delta<0 \rightarrow$ ریشه نداریم

SANA

Subject

Date. Month. Year.

مثال۱) بدون حل معادله $5x^2-7x+1=0$ ، درباره وجود و علامت ریشه ها بحث کنید.

$\Delta: 49-20=29>0$

$P=1/5>0$

$S=7/5>0$ $\Rightarrow$ دو ریشه مثبت وجود دارد.

مثال۲) به ازای چه مقادیری از m ، معادله $mx^2-mx+(m-1)=0$

الف) دو ریشه ناهم‌علامت دارد؟

ب) دو ریشه هم‌علامت دارد؟

مثال۳) حدود m را طوری تعیین کنید که $y=mx^2-mx+(m-1)$

الف) از ربع اول عبور نکند.

ب) از ربع اول عبور کند.

$m>0$ ✗

$m<0 \rightarrow \{\Delta<0$

* اگر $P<0$ باشد، Δ حتما مثبت است.

۲-الف) a,c ناهم‌علامت $\Rightarrow \Delta: b^2-4ac>0$

$P<0 \quad \frac{m-1}{m}<0 \rightarrow 0<m<1$

ب) $\begin{cases} P>0 & \frac{m-1}{m}>0 \Rightarrow \begin{cases} m>1 \\ m<0 \end{cases} \text{یا} \\ \Delta\geq 0 & \rightarrow m^2-4m(m-1)\geq 0 \\ & \rightarrow -3m^2+4m\geq 0 \\ & 0\leq m\leq 4/3 \end{cases} \Rightarrow 1<m\leq 4/3$

SANA

Subject
Date. Month. Year.

چند نکته : $ax^2+bx+c=0$

۱) $c=0 \Leftarrow$ یک ریشه صفر، یک ریشه $-b/a$

۲) $b=0 \Leftrightarrow$ ریشه های قرینه (به شرط وجود) $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

a و c ناهمعلامت

۳) $a+b+c=0 \Leftarrow$ یک ریشه 1 یک ریشه $\frac{c}{a}$

۴) $a+c=b \Leftarrow$ یک ریشه -1 یک ریشه $\frac{-c}{a}$

۵) $a=c \Leftrightarrow$ دو ریشه عکس هم اند (به شرط وجود)

۶) a و c ناهمعلامت باشند $\Leftarrow$ حتماً دو ریشه وجود دارد که ناهمعلامت نیز هستند.

★ نوشتن معادله‌ای که ریشه‌های آن مرتبط با ریشه‌های معادله داده شده باشند.

مثال) $2x^2-5x+1=0$ داریم. معادله‌ای بنویسید که:

الف) ریشه های آن، قرینه ریشه های معادله فوق باشند.

ب) " " ، معکوس " " " "

ج) ریشه های آن از ۲ برابر ریشه های معادله فوق، یک واحد کمتر باشند.

الف) ①

$$\alpha,\beta \rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta \\ P=\alpha\beta \end{cases}$$

$$\rightarrow -\alpha,-\beta \rightarrow \begin{cases} S'=-\alpha-\beta=-(\alpha+\beta)=-S \\ P'=(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta=P \end{cases} \Rightarrow 2x^2+5x+1=0$$

③

$$X=-x \rightarrow x=-X$$

$$\Rightarrow 2X^2+5X+1=0$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

ب) ①

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \rightarrow \begin{cases} P' = 1/P = 2 \\ S' = 1/\alpha + 1/\beta = S/P = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (x^2 - S'x + P' = 0)$$

②

$$X = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{X}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{X}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{X}\right) + 1 = 0 \xRightarrow{\times X^2} 2 - 5X + X^2 = 0$$

$$\Rightarrow X^2 - 5X + 2 = 0$$

ج)

$$\begin{matrix} \alpha' = 2\alpha - 1 \\ \beta' = 2\beta - 1 \end{matrix} \quad \begin{cases} P' = (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4P - 2S + 1 = -2 \\ S' = (2\alpha - 1) + (2\beta - 1) = 2S - 2 = 3 \end{cases}$$

$$X = 2\alpha - 1 \Rightarrow x = \frac{X+1}{2}$$

$$\rightarrow 2\left(\frac{X+1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{X+1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{X^2}{2} + X + \frac{1}{2} \quad -\frac{5}{2}X - \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X - 1 = 0$$

چند جمله ای وارونه :

ریشه صفر نداشته باشیم

$a_n, a_0 \neq 0$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را داریم

چند جمله ای $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ را چند جمله ای وارونه $P(x)$ می نامند که ریشه های آن ، عکس ریشه های $P(x)$ است.

P ریشه $r \Rightarrow P(r) = 0 \Rightarrow a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$

Q ریشه $\frac{1}{r} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{r}\right) = a_0\left(\frac{1}{r}\right)^n + \dots + a_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right) + a_n = \frac{1}{r^n} P(r) = 0$

SANA

Subject

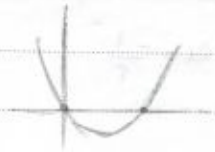
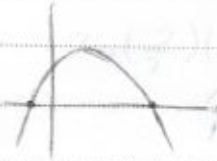
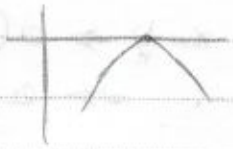
Date. Month. Year.

* عکس ماجدا نیز برقرار است چون Q نیز چند جمله‌ای وارون P است.

سهمی (نمودار $y=ax^2+bx+c$)

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \xrightarrow{\text{رأس سهمی}} \left(\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{x_0},\underbrace{\frac{-\Delta}{4a}}_{y_0}\right)$$

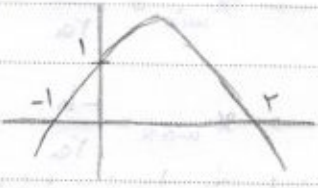
محور تقارن : $x=x_0=\frac{-b}{2a}$

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$a>0$ min دارد			
$a<0$ max دارد			

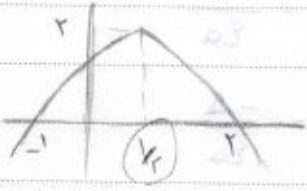
- محل تقاطع محور y ها ← $x=0 \Rightarrow y=c$
- محل تقاطع محور x ها ← ریشه‌های $ax^2+bx+c=0$ (به شرط وجود)

مثال) در نمودارهای زیر $(y=ax^2+bx+c)$ a، b و c را بیابید.

الف)



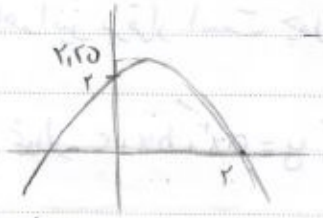
ب)



Subject

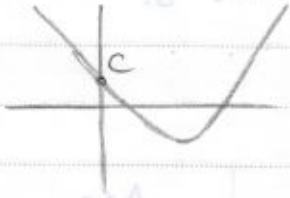
Date. Month. Year.

ج) $-x^2+x+2$



حل خانه

مثال۲) در سهمی زیر علامت Δ و S و P و a و b و c را تعیین کنید.



$\Delta > 0$ دو ریشه $\quad S > 0 \quad P > 0$

$a > 0 \quad c > 0$

$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow b < 0$

① الف) $a(x-2)(x+1) \rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$

$-\frac{1}{2}(x^2-x-2) = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

ب) $a(x-2)(x+1) \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow a\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = 2$

$\Rightarrow a = \frac{-8}{9}$

ماکزیمم و مینیمم (بدون مشتق):

$$y = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$\begin{cases} a>0 \rightarrow \overset{\text{مقدار}}{x_{min}} = \frac{-b}{2a}, \quad \overset{\text{مقدار}}{y_{max}} = \frac{-\Delta}{4a} \\ a<0 \rightarrow x_{max} = \frac{-b}{2a}, \quad y_{max} = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$

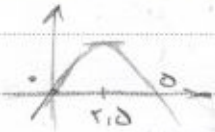
Subject

Date. Month. Year.

مثال) مجموع دو عدد ۵ است. حداکثر حاصل ضرب آنها چقدر است؟

① $a+b=5 \rightsquigarrow b=5-a$

$\max(ab)=?$



$\max(\underbrace{a(5-a)})$

$y \longrightarrow -a^2+5a \rightsquigarrow \max y = 6.25$

② $a,b>0$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \rightarrow \frac{5}{2} \geq \sqrt{ab} \longrightarrow a=b=2.5$

$ab \leq \frac{25}{4} = 6.25$

$a+b \geq 2\sqrt{ab} \rightsquigarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ ✓

مثال۱) از بین مستطیل‌هایی که محیط ۱۰ دارند، کدام بیشترین مساحت را دارد؟

مثال۲) از بین مستطیل‌هایی که محیط ۴ دارند، کدام کمترین طول قطر را دارند؟

۱- $\begin{cases} a+b=5 \\ \max ab = 6.25 \end{cases}$ $\min = 0$

۲- $a+b=2 \rightsquigarrow a=2-b$

$c=\sqrt{(2-b)^2+b^2} = \sqrt{4+b^2-4b+b^2} = \sqrt{2b^2-4b+4}$

$\Rightarrow x_{min} = 4/4 = 1 \Rightarrow c_{min} = \sqrt{2}$

Subject
Date. Month. Year.

معادلات و نامعادلات گویا و گنگ:

الف) معادلات گویا

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$ بعد از مخرج مشترک

$$D = \{x \mid g_1(x) \neq 0 \ , \ g_2(x) \neq 0\}$$

طرفین وسطین $\rightarrow f_1 g_2 = f_2 g_1 \rightarrow$ تجزیه $\rightarrow$ انتخاب جواب های داخل دامنه

مثال) معادله ی $\frac{k}{2x} = \frac{x-3}{x^2-5x}$ به ازای چه مقادیری از k فاقد جواب است.

$x \neq 0, 5$

$\div x \quad \frac{k}{2} = \frac{x-3}{x-5} \rightarrow k(x-5) = 2x-6$

$\rightarrow (k-2)x = 5k-6$

$$\begin{cases} k=2 \rightarrow 0x = 4 \ \times \\ k \neq 2 \rightarrow x = \frac{5k-6}{k-2} \begin{cases} \neq 0 \rightarrow k = 6/5 \\ \neq 5 \ \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

داخل دامنه جواب ندارد

به ازای $k = 2, 5/6$ جواب ندارد.

$$ax = b \quad \begin{cases} a \neq 0 \leftrightarrow \text{یک جواب} \\ a = 0, \ b = 0 \leftrightarrow \text{بیشمار جواب} \\ a = 0, \ b \neq 0 \leftrightarrow \text{فاقد جواب} \end{cases}$$

Subject

Date. Month. Year.

ب) معادلات گنگ (اصم) ← متغیر زیر رادیکال ← شرط دامنه

← حذف رادیکال $A = B$ ← رادیکال دارد

شرط توان ۲ رساندن ← A و B هم‌علامت

$$\Downarrow$$

$$A^2 = B^2$$

مثال۱) حل $x - 9 = x(\sqrt{x} - 3)$

مثال۲) عددی طبیعی را پیدا کنید که دو برابر جذر مجموع آن با عدد ۲، از جذر مجموع آن با ۲۳، یک واحد کمتر باشد.

امتیازی) دو کارگر اگر با هم کار کنند، کاری را در مدت ۲۰ روز تمام می‌کنند پس از ۸ روز کار، یکی از کارگران کار را ترک کرده و کارگر دیگر بقیه کار را در مدت ۱۵ روز تمام کرد. تعیین کنید هر یک از کارگرها به تنهایی کار را در چند روز می‌توانستند تمام کنند.

۱- $AB = AC \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \text{یا} \\ B = C \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 0 \rightarrow x = 9 \\ \text{یا} \\ \sqrt{x} + 3 = x \rightarrow \sqrt{x} = x - 3 \xrightarrow{x \geq 3} x = (x-3)^2 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x \geq 3 \Rightarrow \frac{7 + \sqrt{13}}{2}$$

۲- $2\sqrt{x+2} = \sqrt{x+23} - 1 \rightsquigarrow x = 2$

$$4x + 8 = x + 23 + 1 - \sqrt{x+23} \rightarrow 3x - 15 = -\sqrt{x+23}$$

$$x + 23 = 9x^2 + 225 - 90x \rightarrow 9x^2 - 91x - 202 = 0$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

یادآوری: قدر مطلق

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

① $|-u| = |u| \rightarrow |x-y| = |y-x|$

② $|xy| = |x||y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

③ $|u|^2 = |u^2| = u^2$

④ $\sqrt{u^2} = |u|$, $\sqrt[2k]{u^{2k}} = |u|$

⑤ $x = y \Rightarrow |x| = |y|$

$|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

⑥ $|x| = |y| \overset{\text{هم ارز}}{\Longleftrightarrow} x^2 = y^2$

⑦ $|x| \leq |y| \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2$

⑧ $|x| = m \overset{m>0}{\Longleftrightarrow} x = \pm m$ $\quad m<0$ X

⑨ $|x| \leq m \overset{m>0}{\Longleftrightarrow} -m \leq x \leq m$ $\quad m<0$ X

⑩ $|x| \geq m \overset{m>0}{\Longleftrightarrow} x \geq m$ یا $x \leq -m$ $\quad m<0 \rightsquigarrow R$

⑪ $-|x| \leq x \leq |x|$

⑫ $|a \underset{-}{+} b| \leq |a| + |b|$ نامساوی مثلثی:

شرط تساوی $\rightarrow ab > 0$

$\rightarrow ab \leq 0$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

(۱۳) $|a-b| \geq |a|-|b|$

(۱۴) $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$

اثبات به کمک $\sqrt{u^2}=|u|$

(۱) $\sqrt{(-u)^2}=\sqrt{u^2}$

(۲) $\underbrace{\sqrt{(xy)^2}}_{\sqrt{x^2y^2}}=\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}$

(۶) $x^2=y^2 \Leftarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{y^2}$

$\leq \qquad \leq$

(۷)

(۹) $\underbrace{|x^2|}_{x^2} \leq m^2 \rightsquigarrow x^2-m^2 \leq 0$

$m>0$

طرفین به توان ۲

$\rightsquigarrow (x-m)(x+m) \leq 0$

$\Rightarrow -m \leq x \leq m$

(۱۰) $x^2 \geq m^2$

$(x-m)(x+m) \geq 0$

$\Rightarrow x \geq m$ یا $x \leq -m$

(۱۲) (۱) $-|a| \leq a \leq |a|$

$-|b| \leq b \leq |b|$

$\underbrace{-(|a|+|b|)}_{-m} \leq a+b \leq \underbrace{|a|+|b|}_{m} \Rightarrow |a+b| \leq \overset{|a|+|b|}{m}$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

(۲) $(|a+b|)^2 \leq (|a|+|b|)^2$

$a^2+b^2+2ab \leq a^2+b^2+2|ab| \Rightarrow ab \leq |ab|$

(۱۳) در ۱۲ $\begin{cases} a: a-b \\ b: b \end{cases}$

$\underbrace{|a-b+b|}_{|a|} \leq |a-b|+|b|$

$\Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$

(۱۴) $a \leftrightarrow b$

$|a-b| \geq \overbrace{|b|-|a|}^{-m}$

$|a-b| \geq \underbrace{|a|-|b|}_{m}$

مثال) نامساوی مثلثی

۱- جواب‌های معادله $|۲x-۱|+|۵x-۱۰| = |۱۱-۷x|$ را بدست آورید.

۲- اگر $|x-y|+|y-z| = |x-z|$ باشد، چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟

۳- ثابت کنید $|x-۱|+|x-۲|+|x-۳| \geq ۲$

۴- الف) فاصله‌ی x و a کمتر از ۰/۰۱ است. این عبارت را به کمک قدر مطلق بیان کنید.

ب) بازه $-۱ < x < ۲$ را به کمک قدر مطلق نمایش دهید.

Subject

Date. Month. Year.

۱- شرط تساوی : $ab > 0$

$\Rightarrow (2x-1)(5x-10) \geq 0 \Rightarrow 10x^2 - 25x + 10 \geq 0$

$\Rightarrow x \geq 2$ یا $x \leq 1/2$

۲- $(x-z)(y-z) \geq 0$

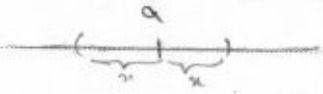
$\Rightarrow x \geq y \geq z$ یا $x \leq y \leq z$

۳- $|x-1| + |x-3| \geq 2 \leftarrow |x-1-(x-3)|$

$1 \leq x \leq 3$

$$\begin{cases} |x-1| + |x-3| \geq 2 \longrightarrow 1 \leq x \leq 3 \\ |x-2| \geq 0 \longrightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

۴- همسایگی a به شعاع ۰/۰۱



فاصله

$\Rightarrow |x - a| < 0/01$

$\rightsquigarrow |x - \frac{1}{2}| < 3/2$

$-\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < 3/2 \Rightarrow |x - \frac{1}{2}| < 3/2$

مثال) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 3 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

$= |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

یادآوری تعیین علامت: $\frac{P(x)}{Q(x)}$

	$-b/a$	
$ax+b$	مخالف a	موافق a

	$\Delta<0$
ax^2+bx+c	موافق a

$\Delta=0$	$-b/2a$	
	موافق a	موافق a

$\Delta>0$	x_1		x_2
	موافق a	مخالف a	موافق a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-1)^4(x+1)^3(-x^2+x-7)}{x^4(x-3)(x^2+1)(x-1)}$$

		-1		0		1		3	
	$+$		$+$	0	$+$	ت ن	$-$	ت ن	$+$	ت ن	$+$
یا		$-$		$-$		$-$	$+$		$-$		$-$

$\frac{++-}{++++}$ x بزرگ

SANA

Subject

Date. Month. Year.

روش سریع :

۱- ریشه صورت ← ۰ ، ریشه مخرج ، ت ، ن

۲- از ∞+ ، علامت عبارت را تعیین می‌کنیم

۳- از آخر به اول علامت‌ها را تعیین می‌کنیم.

الف) عبور از ریشه ساده (یا مرتبه فرد) ← تغییر علامت

ب) عبور از ریشه مضاعف (یا مرتبه زوج) ← ثابت ماندن علامت
یا قدر مطلق

مثال۱) به ازای چه مقادیر a ، معادله $\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x}+\frac{1}{x+2a}=0$ دارای جواب است؟

مثال۲) معادله $\sqrt{2x-4}+\sqrt{7x+14}=5$ را حل کنید

۱- $$\frac{x(x+2a)+(a-x)(x+2a)+x(a-x)}{x(a-x)(x+2a)}=0$$

$$\rightsquigarrow x^2-2ax-2a^2=0 \Rightarrow x=\frac{2a\pm\overbrace{\sqrt{4a^2+12a^2}}^{4a}}{2}=\begin{cases}-a\\2a\end{cases}$$

$$x\neq a,0,2a \Rightarrow \begin{cases}0 & a\neq 0\\ a & \text{"}\\ 2a & \text{"}\end{cases}$$

۲- $$\underbrace{\sqrt{2x-4}}_{\geq 0}+\underbrace{\sqrt{7x+14}}_{\geq 0}=5 \quad \rightsquigarrow x\geq 2$$

اکیداً صعودی $\Rightarrow$ یکبار ۵ می‌شود

$$x=2: \quad 0+\sqrt{28}>\sqrt{25} \Rightarrow x=\emptyset$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

$2x^2 - 5x + 1 = 0$ $\qquad S_k = \alpha^k + \beta^k$

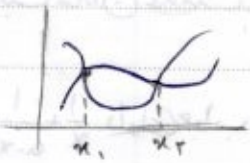
$\times \alpha^{k-1}$ $\quad \alpha^2 = \frac{5}{2}\alpha - \frac{1}{2}$

$\alpha^{k+1} = \frac{5}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^{k-1}$

$\beta^{k+1} = \frac{5}{2}\beta^k - \frac{1}{2}\beta^{k-1} \longrightarrow S_{k+1} = \frac{5}{2}S_k - \frac{1}{2}S_{k-1}$

روش هندسی (نموداری) حل معادله‌ها

$\underbrace{f(x)}_{y} = \underbrace{g(x)}_{y} \longrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$



تعداد جواب ها - جواب‌های تقریبی

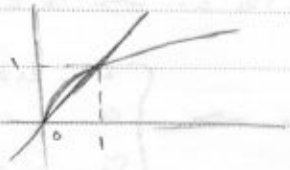
مثال) معادلات زیر را به صورت جبری حل کرده و به کمک نمودار نیز بررسی کنید.

$x = \sqrt{x}$

کتاب درسی $\begin{cases} 1 - x = \sqrt{x} \\ |x| = \sqrt{2 - x} \end{cases}$

$\xrightarrow{+\sqrt{\ }} x^2 = x$

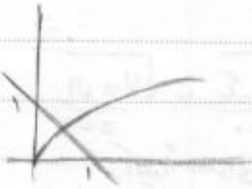
$\Rightarrow x = 0, 1$



$\rightsquigarrow 1 + x^2 - 2x = x \quad (0 \leq x \leq 1)$

$x^2 - 3x + 1 = 0 \rightsquigarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \simeq 0.4$



$x \leq -2 \quad x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = 0 \rightsquigarrow x = 1, -2$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

نامعادله‌های گویا

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} < \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

توجه ۱: ضرب در نابرابری ممکن است جهت را تغییر دهد

$$\begin{cases} c>0 , a<b \rightarrow ac<bc \\ c<0 , a<b \rightarrow ac>bc \end{cases}$$

توجه ۲: در حالت کلی حق نداریم در یک نامعادله طرفین وسطین انجام دهیم.

بکلاگر: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} , bd>0 \rightarrow ad<bc$

توجه ۳: $0<a<b \xrightarrow{n \text{ زوج}} a^n<b^n$

$a<b \xrightarrow{n \text{ فرد}} a^n<b^n$

مثال) اشتباه در حل نامعادله‌های زیر را بیابید. سپس آنها را به روش صحیح حل کنید.

۱) $\frac{1}{x^2-4} < \frac{1}{12} \xrightarrow{x^2-4>0} x^2-4>12 \rightarrow |x|>4$

$\rightarrow x>4$ یا $x<-4$

$\xrightarrow{x^2-4<0} - < + \checkmark \Rightarrow x^2<4 \rightarrow -2<x<2$

۲) $\sqrt{2(x+6)} < x+2 \xrightarrow{x>-2} 2(x+6) < x^2+4x+4$

$x \geq -6$ $\rightarrow (x-2)(x+4)>0 \rightarrow x>2$ یا $x<-4$

$x<-2$ ✗ $x>-2$ ✓

$\Rightarrow \cap \Rightarrow x>2$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

۱- $\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{12} < 0 \rightarrow \frac{12 - x^2 + 4}{12(x^2-4)} < 0$

$\rightarrow \frac{16 - x^2}{12(x^2-4)} < 0$

		-4		-2		2		4	
	−	0	+	∄	−	∄	+	0	−

$x < -4$ یا $-2 < x < 2$ یا $x > 4$

نامعادله گنگ (اصم)

$f(x) < g(x) \quad D = D_f \cap D_g$

برای توان رسانی

۱) $- < +$ ← جواب $= D$

۲) $+ < -$ ← بدون جواب

۳) $+ < +$ ← توان رسانی ← جواب داخل دامنه

$(- < -)$ ← توان زوج جهت را عوض می کند. (تعیین علامت)

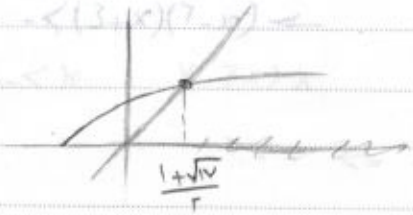
مثال)

الف) $\sqrt{x+1} < 2x$ $\quad D = [-1, +\infty)$

$2x \geq 0 \ (x \geq 0) \ , \ (x+1) < 4x^2 \rightarrow 4x^2 - x - 1 > 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \rightarrow x < \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$ یا $x > \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$

$x \geq 0$ غلط



Subject

Date. Month. Year.

ب) $\underbrace{(x+3)}_{+}\sqrt{\underbrace{\frac{6-x}{8-x}}_{+}} \geq 0$

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \\ \text{دامنه} \rightarrow x > 8 \text{ یا } x \leq 6 \end{cases}$

$\Rightarrow -3 \leq x \leq 6$ یا $x > 8$

مثال) الف) $\underbrace{\sqrt{x^2+x-2}}_{+} > x$

$D: x \geq 1$ یا $x \leq -2$

$x < 0 \rightarrow + > - \uparrow \rightarrow x \leq -2$

$x \geq 0 \rightarrow + > + \rightarrow x^2+x-2 > x^2 \rightarrow x > 2$ ✓

اشتراک با شرط $x \geq 0$ دامنه، خودش می‌شود

ب) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}$

SANA

Subject

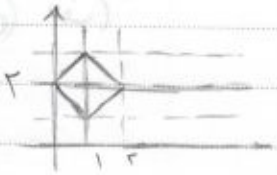
Date. Month. Year.

$x \leq 1 , y \leq 2 \rightarrow 1-x+2-y=1 \rightarrow y=2-x$

$x \geq 1 , y \leq 2 \rightarrow x-1+2-y=1 \rightarrow y=x$

$x \leq 1 , y \geq 2 \rightarrow 1-x+y-2=1 \rightarrow y=x+2$

$x \geq 1 , y \geq 2 \rightarrow x-1+y-2=1 \rightarrow y=4-x$



$||x-1|-2|-3|<3$

$x \geq 1 \rightarrow ||x-3|-3|<3 \begin{cases} 1 \leq x < 3 & |x|<3 \rightarrow -3<x<3 \\ x \geq 3 & |x-6|<3 \rightarrow 3<x<9 \end{cases}$

$x<1 \rightarrow ||x+1|-3|<3 \begin{cases} x \leq -1 , & |x+4|<3 \rightarrow -7<x<-1 \\ -1<x<1 & |x-2|<3 \rightarrow -1<x<5 \end{cases}$

جمع تعدادی عبارت نامنفی وقتی صفر می شوند که همه ی آن ها صفر باشند.

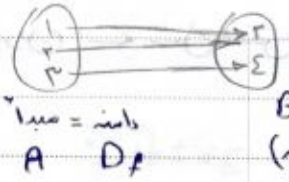
Subject

Date. Month. Year.

تابع (f) : مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها که در آن زوج مرتب‌های متمایز، عضو اول تکراری نداشته باشند.

بیان ۲ : نمودار ون

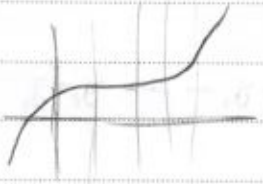
$R_f \subseteq B$



از هر نقطه مبدأ (= دامنه) دقیقاً یک خط خارج می‌شود

بیان ۳ : دستگاه مختصات

← آزمون خط عمودی



بیان ۴ : ماشینی

بیان ۵ : $y = f(x) \quad , \quad x \in D_f$

مثال)

ضابطه + دامنه

$y^2 - 2xy + x^2 = 0$

$(y-x)^2 = 0 \rightsquigarrow y = x$ تابع

$y^2 - 2xy + 1 = 0$

$y = x \pm \sqrt{x^2 - 4}$

$x = \sqrt{5} \; : \; y = \sqrt{5} \pm 1$

SANA

Subject
Date. Month. Year.

تشخیص تابع از عبارت جبری :

$$\left(\begin{matrix} (x, y_1) \\ (x, y_2) \end{matrix} \longrightarrow y_1 = y_2 \right) \longrightarrow \text{تابع}$$

برای تابع نبودن ← مثال نقض

مثال)

$y^2 + x^2 = 1 \quad x = 0 \rightarrow y = \pm 1 \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

$y^2 + x^2 = 0 \quad (0, 0) \quad y = \pm\sqrt{-x^2}$

$x + y^2 = 1 \quad (0, 1), (0, -1)$

$x^2 + y = 1 \quad y = 1 - x^2 = f(x)$

$$\left. \begin{matrix} (x, y_1) \in f \Rightarrow x^2 + y_1 = 1 \\ (x, y_2) \in f \Rightarrow x^2 + y_2 = 1 \end{matrix} \right) \rightarrow y_2 - y_1 = 0 \rightarrow y_2 = y_1$$

تذکر: قرارداد: اگر دامنه را نداده باشند، آن را بزرگترین زیرمجموعه اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم که در آن رابطه $f(x)$ با معنا باشد

بیان ۶: (استاندارد)

$$f : \overset{D_f}{A} \longrightarrow \underset{R_f \subseteq B}{B}$$

$$x \longmapsto f(x) = y$$

مثال)

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt{x+1} = y$$

$D_f = [1, 2] \qquad R_f = [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

Subject

Date. Month. Year.

تذکر:

$f \rightarrow$ تابع (دامنه و ضابطه)

$f(x) \rightarrow$ رابطه جبری

$x \rightarrow$ متغیر مستقل $\qquad y \rightarrow$ خروجی

تساوی دو تابع: نمودارها منطبق (زوج مرتب‌ها برابر)

$$f=g \longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ D_f = D_g \\ 2)\ \forall x \in \underset{(=D_g)}{D_f} : f(x) = g(x) \end{cases}$$

مثال) آیا f و g برابرند؟

الف) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ ، $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

$D_g : x \geq 1 \qquad D_f : \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

ب) $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$, $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$

$D_f = D_g = [0,1]$

تابع چندضابطه‌ای:

$$y = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \vdots & \\ f_k(x) & x \in D_k \end{cases} \qquad D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

SANA

سه شنبه	۸,۱۱	۱ - ۱۰۰
دوشنبه	۸,۱۷	۱۰۱ - ۲۰۰
دوشنبه	۸,۲۴	۲۰۱ - ۲۹۸

تحویل تست های باقیمانده فصل !

یک رابطه چند ضابطه ای تنها درصورتی تابع نیست که دامنه ها اشتراک داشته باشند و در بخش های مشترک، خروجی های متفاوت داشته باشیم.

مثال) a و b را چنان تعیین کنید که تابع باشد.

$$y=\begin{cases} ax+5 & x\geq 1 \\ x^2+4 & -1\leq x\leq 1 \\ \dfrac{bx}{ax+1} & x\leq -1 \end{cases}$$

$x=1:\ a+5=5 \rightarrow a=0$

$x=-1:\ 5=\dfrac{-b}{-a+1} \rightarrow b=-5$

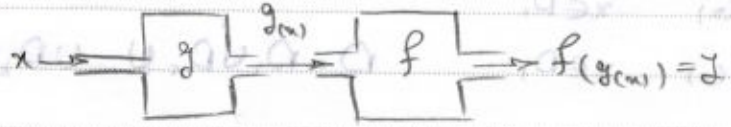
اعمال روی توابع:

$f \underset{\div}{\overset{+}{\times}} g$: دامنه $\begin{cases} D_{f\underset{\div}{\overset{+}{\times}}g} = D_f \cap D_g \\ D_{f\div g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g_{(x)}=0\} \end{cases}$

$(x_1,y_1)\ (x_2,y_2) \xrightarrow{f+g} (x_1, y_1+y_2)$

ضابطه $(f \underset{\div}{\overset{+}{\times}} g)(x) = f_{(x)} \underset{\div}{\overset{+}{\times}} g_{(x)}$

$f\circ g$



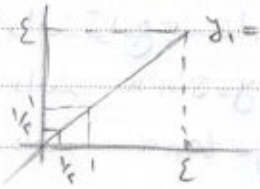
$(f\circ g)(x) = f(g_{(x)})$

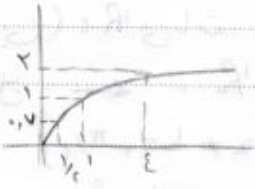
$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g_{(x)} \in D_f\}$

Subject

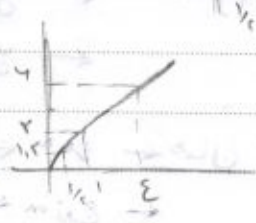
Date. Month. Year.

مثال) $f(x) = x + \sqrt{x}$





$\Rightarrow$



نکاتی در مورد ترکیب توابع:

① $D_{fog} \neq D_f \cap R_g$

② اما اگر $R_g \cap D_f = \emptyset \leftarrow$ fog تشکیل نمی‌شود $(\emptyset)$

$R_g = D_f \leftarrow$ ① $\leftarrow D_{fog} = D_g$

② $\leftarrow R_{fog} = R_f$

③ در حالت کلی: $R_{fog} \subseteq R_f \ , \ D_{fog} \subseteq D_g$

④ ترکیب توابع خاصیت جابجایی ندارد $\leftarrow fog \neq gof$

شرکت پذیری دارد $\leftarrow fo(goh) = (fog)oh$

Subject

Date. Month. Year.

قواعد تعیین دامنه :

① دامنه توابع چند جمله‌ای (توان حسابی) ، $\mathbb{R}$ می‌باشد.

② دامنه $y=\sin x$, $y=\cos x$ ← $\mathbb{R}$ $(y=[x], |x|)$

③ دامنه $y=\tan x$ ← $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi+\pi/2\}$ $k\in\mathbb{Z}$

$y=\cot x$ ← $\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi\}$

④ دامنه $y=\sqrt[m]{f(x)}$ ← m فرد ← همان D_f

m زوج ← $\{x\in D_f \mid f(x)\geq 0\}$

⑤ دامنه $f(x)=\log_a^x$ ، $\mathbb{R}^+$ $(x>0)$ است.

⑥ دامنه تابع $y=a^x$ ← اگر $a>0$ ← $\mathbb{R}$ است.

اگر $a<0$ ← اعداد گویا با مخرج فرد

⑦ دامنه توابع $f\pm g$, $f.g$ ← $D_f\cap D_g$

⑧ دامنه $\frac{f}{g}$ $D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$

⑨ دامنه fog ← $\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

★ توان کسر اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

گویاها مخرج فرد : $x=\frac{p}{2q+1} \mid p,q\in\mathbb{Z}$

Subject

Date. Month. Year.

قواعد تعیین برد:

① برد توابع چندجمله‌ای درجه فرد، $\mathbb{R}$ می باشد.

② کمترین مقدار v^{2n} (v عبارتی برحسب x) برابر صفر است. (درصورت امکان)

مثال)

$$y = x - \sqrt{x} = \underbrace{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} - \frac{1}{4} \longrightarrow y \geq \frac{-1}{4}$$

$$y = x + \sqrt{x} = \underbrace{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} - \frac{1}{4} \longrightarrow y \geq 0$$

③ $a > 0 \longrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$ $\qquad$ $a < 0 \longrightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2$

④ دو متغیر مثبت { مجموع ثابت ← حاصلضرب حداکثر می شود وقتی که با هم برابر باشند.

{ حاصلضرب ثابت ← حاصلجمع حداقل می شود وقتی که با هم برابر باشند.

مثال)

$$ab = 2^x \times 2^{1-x} = 2 \Rightarrow a = b = \sqrt{2}$$

$$y = \underbrace{2^x}_{a} + \underbrace{2^{1-x}}_{b} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow a + b = 2\sqrt{2}$$

⑤ برای قدر مطلق {

$$|x-a| + |x-b| \geq |a-b|$$

$$-|a-b| \leq |x-a| - |x-b| \leq |a-b|$$

⑥ برای جز صحیح

$$0 \leq x - [x] < 1$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

⑦ مثلثاتی ها:

$$-1 \leq \begin{matrix} \sin x \\ \cos x \end{matrix} \leq 1 \qquad -\infty < \begin{matrix} \tan x \\ \cot x \end{matrix} < +\infty$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2} \quad \star$$

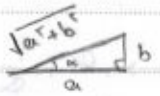
$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \sin^{2n} x + \cos^{2n} x \leq 1$$

① برای $y=ax^2+bx+c$

$$R_f = \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right) \leftarrow a>0$$

$$R_f = \left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right] \leftarrow a<0$$

$\star$:



$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\underbrace{\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x}_{\sin(\alpha+x)})$$

$$-1 \leq \sin \leq 1 \Rightarrow \pm\sqrt{a^2+b^2}$$

روش عمومی محاسبه برد:

$$t \in R_f \longleftrightarrow \exists x \in D_f \mid f(x)=t$$

معادله $f(x)=t$ را برحسب x برای پارامتر x حل می‌کنیم. شرایط وجود جواب (مثل $x \in D_f$) ، محدوده‌ی t قابل قبول را مشخص می‌کند.

مثال) $y=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

$$t=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \quad x>0 \xrightarrow{\wedge 2} t>0 \; , \; t^2=\frac{x+1}{x}$$

$$xt^2 = x+1 \rightsquigarrow xt^2 - x = 1 \Rightarrow (t^2-1)x = 1$$

$$\xrightarrow{t \neq \pm 1} x = \frac{1}{t^2-1}$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

شرط دامنه : $\frac{1}{t^2-1} > 0 \rightsquigarrow t^2 > 1 \rightsquigarrow \begin{cases} t>1 \checkmark \\ t<-1 \times \end{cases}$

$y = x^2 - 9x + 7 = t \rightsquigarrow x^2 - 9x + 7 - t = 0$

$\Delta \geq 0 : 81 - 4(7-t) \geq 0 \rightsquigarrow t \geq 7 - \frac{81}{4}$

توابع خاص :

۱) تابع ثابت روی A : $\forall x \in A : f(x) = c$

(برد تک عضوی)

۲) تابع همانی روی A : $\forall x \in A : f(x) = x$

(روی نیمساز ربع اول و سوم)

۳) تابع کسری $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$ ← حالت خاص مهم :

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad \neq bc)$ $\begin{cases} x \neq -d/c \\ y \neq a/c \end{cases}$

نمودار :

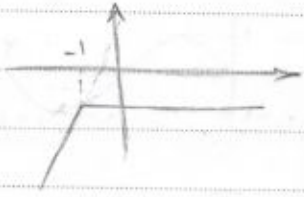
الف) نمودارهای پایه :

۱) خط و سهمی

۲) حاوی قدر مطلق ← به کمک بازه بندی

$y = x - |x+1|$

$= \begin{cases} -1 & x \geq -1 \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$



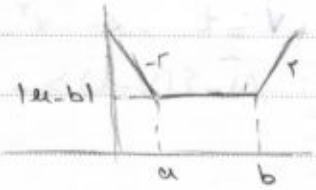
Subject

Date. Month. Year.

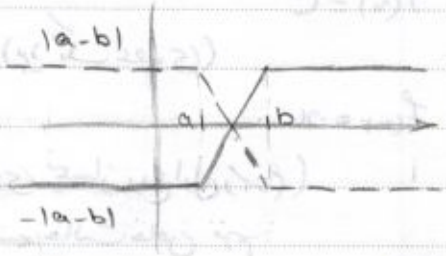
۳- نمودار معروف

$y=|x|$

$y=|x-a|+|x-b|$

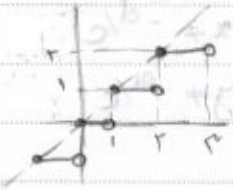


$y=|x-a|-|x-b|$

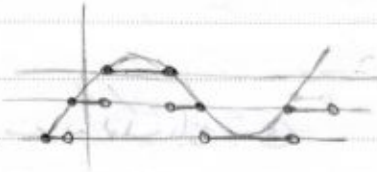


۳) حاوی جزء صحیح

$y=[x]$



$y=[f(x)]$



٤) مثلثاتی

$y=\sin x$

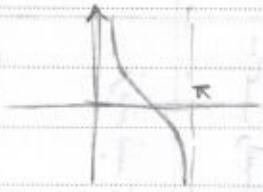
$y=\cos x$

Subject

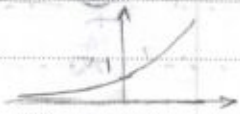
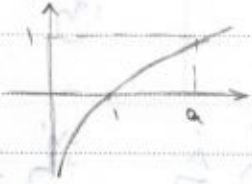
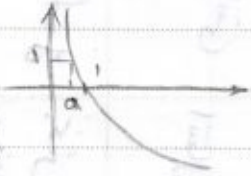
Date. Month. Year.

$y = \tan x$

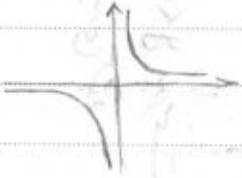
$y = \cot x$



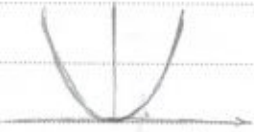
۵) نمایی و لگاریتم:

	$a>1$	$0<a<1$
$y=a^x$		
$y=\log_a^x$		

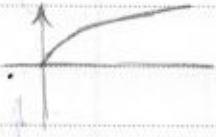
۶) سایر: $\frac{1}{x} \leftarrow$



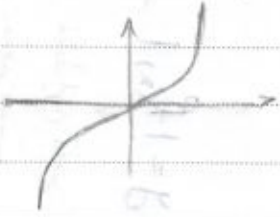
x^2



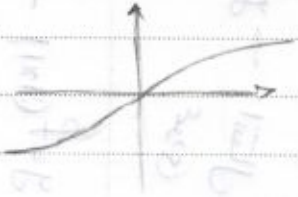
$\Rightarrow \sqrt{x}$



x^3



$\Rightarrow \sqrt[3]{x}$



	x	y
انتقال	$y=f(x+a)$ انتقال افقی $a>0 \rightarrow$ به سمت چپ $a<0 \rightarrow$ به سمت راست	$y+b=f(x)$ انتقال عمودی $\rightarrow y=f(x)-b$ $b>0$ انتقال به پایین $b<0$ انتقال به بالا
قرینه کردن	$y=f(-x)$ قرینه نسبت به محور y ها $-y=f(x) \rightarrow y=-f(x)$ قرینه نسبت به محور x ها	$y=f(\lvert x\rvert) \rightarrow$ بخش $x<0$ حذف و بخش $x>0$ در آن آینه می‌شود $\lvert y\rvert=f(x) \rightarrow$ بخش $y<0$ حذف و بخش $y>0$ در آن آینه می‌شود $y=\lvert f(x)\rvert \rightarrow$ بخش $y<0$ به سمت بالا قرینه می‌شود فقط این تغییر متغیر نیست
$k>0$ فشردن/باز کردن (انقباض/انبساط)	$y=f(kx)$ افقی فشردن $k>1$ باز کردن $0<k<1$ $ky=f(x)$ عمودی $\rightarrow y=\frac{1}{k}f(x)$	

SANA

Subject

Date. Month. Year.

مثال) نمودار $y=|\sqrt{2x+1}-1|$ را بکشید.

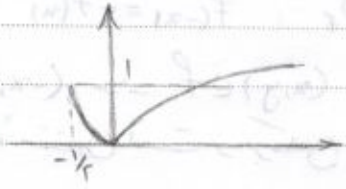
$y=\sqrt{x}$

$y=\sqrt{x+1}$

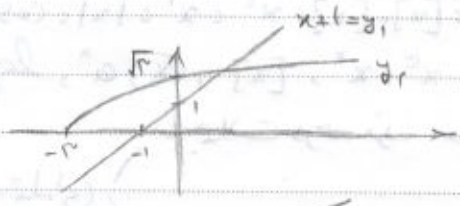
$y=\sqrt{2x+1}$

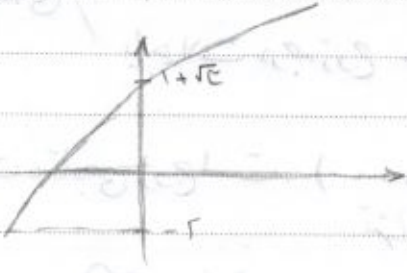
$y=\sqrt{2x+1}-1$

$y=|\sqrt{2x+1}-1|$



مثال) نمودار $y=\underbrace{x+1}_{y_1}+\underbrace{\sqrt{x+3}}_{y_2}$ را رسم کنید.





تابع زوج و فرد:

f را زوج می‌نامند اگر

(شرط دامنه: متقارن نسبت به مبدا)
$$\begin{cases} x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f \\ \forall x\in D_f:\ f(-x)=f(x) \end{cases}$$

بیان دیگر: $(x,y)\in f \Rightarrow (-x,y)\in f$

$\Leftarrow$ نمودار تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است و برعکس.

SANA

Subject
Date. Month. Year.

f را فرد می نامند اگر

$$\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \\ \forall x \in D_f : \ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

بیان دیگر: $(x,y) \in f \Rightarrow (-x,-y) \in f$

$\Leftarrow$ نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ متقارن است و برعکس.

نکات:

① توابع $\sin x$ ، $\tan x$ ، $\cot x$ ، x ، x^3 ، $\frac{1}{x}$ ، $|x+a|-|x-a|$ فرد اند.

توابع $\cos x$ ، $|x|$ ، x^2 ، x^4 ، $[x]+[-x]$ ، $|x-a|+|x+a|$ زوج اند.

توابع $\log x$ ، a^x ، $\sqrt{x}$ ، $[x]$ ، x^3+x^2 نه زوج اند نه فرد.

② توابع چند جمله ای: با جملات درجه فرد $\Leftarrow$ تابع فرد

با جملات درجه زوج $\Leftarrow$ تابع زوج

③ تابع ثابت، تابعی زوج است. ($f(x)=0$ هم زوج است هم فرد)

تنها تابع با دامنه غیر تهی

④ اگر f فرد و $0 \in D_f$ باشد $\Leftarrow$ $f(0)=0$

⑤ تابع دلخواه f با دامنه متقارن را می توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{فرد}}$$

⑥ اگر f و g هر دو فرد $\Leftarrow$ $f\circ g$ ، $g\circ f$ فرد

اگر f زوج و g زوج یا فرد $\Leftarrow$ $f\circ g$ ، $g\circ f$ زوج

SANA

Subject
Date. Month. Year.

۷) اگر f و g زوج ← $f \pm g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ زوج اند.
اگر f و g فرد ← $f \pm g$ فرد، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ زوج.
f و g یکی فرد یکی زوج ← $f.g$ و $\frac{f}{g}$ فرد ولی $f \pm g$
نه زوج نه فرد (به جز حالت خاص که یکی ثابت صفر باشد.)

تابع صعودی / نزولی:

$\forall x_1, x_2 \in D_f \quad x_1 < x_2 \rightarrow$

ا.ص	$f(x_1) < f(x_2)$
ص.	$\leq$
ا.ن	$>$
ن	$\geq$

روش‌های تشخیص
۱) تحلیل مستقیم
۲) رسم نمودار (خصوصاً در چند ضابطه‌ای)
۳) تعیین $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\quad > 0 \quad < 0$
$\geq 0 \quad \leq 0$

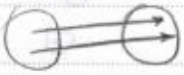
نکات:
۱) تابع ا.ص، ص هم هست ولی نه برعکس.
تابع ا.ن، ن هم هست ولی برعکس نه.
۲) تابع ثابت، هم صعودی است هم نزولی
۳) ترکیب
صعودی و نزولی ← نزولی
صعودی و صعودی یا نزولی و نزولی ← صعودی

Subject
Date. Month. Year.

④ اگر f و g در دامنه مشترک توابعی ا.ص (یا ا.ن) باشند، از بین $f \frac{+}{\times} g$ ، فقط $f+g$ همواره ا.ص (ا.ن) است.
(البته $f.g$ زمانی ا.ص است که $R^+ \subseteq$ برد f و g)

⑤ رفتار تابع f از جهت صعودی/نزولی بودن:
موافق: f^{-1} ، f^{2k+1} ، $\sqrt[2k+1]{f}$ ، a^f $(a>1)$
مخالف: $-f$ ، $\frac{1}{f}$ ، a^f $(0<a<1)$
↳ به شرط صفر نشدن یا تغییر علامت ندادن مخرج

تابع یک به یک:



$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
آزمون خط افقی $\Leftarrow$ $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2)$

نکات:
① اگر f و g ، ۱-۱ باشند ← $f \circ g$ یک به یک است.
② توابع زوج / ثابت / متناوب / دارای محور تقارن ، یک به یک نیستند (به شرط دامنه بیش از یک عدد)
③ تابع ا.ص (ا.ن) ← ۱-۱ است ولی برعکس نه.

④ تشخیص ۱-۱ بودن چند ضابطه‌ای
(البته نمودار هم توصیه می‌شود.)
۱) هر ضابطه ۱-۱ باشد.
۲) اشتراک بردها تهی باشد (به جز در نقاط مشترک دامنه)

Subject

Date. Month. Year.

مثال) حداکثر $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x}$ چقدر است؟

$$\max f \longrightarrow \min x^2+x \longrightarrow -\frac{1}{4}$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

$$f_{max}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/4}=\sqrt[4]{3}$$

---

۱۵) تست فصل اول $x^3+x^2-4x-4=0$

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$$

$$\left[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+\bigcirc+(-x_1x_2x_3)\right]$$

$$ax^n+bx^{n-1}+\dots+c$$

$$S=\frac{-b}{a} \qquad P=(-1)^n\frac{c}{a}$$

نکته: اگر x_0 ریشه مضاعف $P(x)$ باشد

$P(x_0)=0$ اولاً

$P'(x_0)=0$ ثانیاً

نکته: $\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}}_{x}+\underbrace{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}_{y}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

$$x=y=2^{n-1}$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

تابع وارون: $f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$

شرط لازم و کافی وارون پذیری: ۱-۱ بودن

تذکر: $D_f = R_{f^{-1}}$, $R_f = D_{f^{-1}}$

مثال ضابطه‌ای: $f(x) = 2x \quad 0 \leq x \leq 1$

مرحله ۱: $y = 2x \rightarrow x = \frac{y}{2}$, مرحله ۲: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

$D_{f^{-1}} = [0,2]$

نکات:

① f وارون پذیر $\leftarrow (f^{-1})^{-1} = f$

② اگر همزمان $\begin{cases} \forall x \in D_g : f \circ g(x) = x \\ \forall x \in D_f : g \circ f(x) = x \end{cases} \leftarrow f$ و g وارون هم اند.

③ نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه اند.

④ برای حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ، اگر بدانیم جواب فقط روی نیمساز ربع اول و سوم است (مثلاً برای توابع اکیداً صعودی)، کافی است معادله ساده‌تر $f(x) = x$ را حل کنیم.

مثال) $f(x) = x^2 - 4x$ ← الف) طول برخورد f و f^{-1} ؟

$D_f = [2, +\infty)$ ب) ضابطه f^{-1} ؟

الف)

$x^2 - 4x = x \Rightarrow x^2 = 5x \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \times \\ x = 5 & \checkmark \end{cases}$

ب) $y = x^2 - 4x$

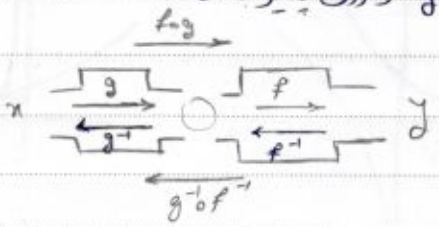
مرحله ۱: $x^2 - 4x - y = 0 \rightsquigarrow x = 2 \pm \sqrt{4+y}$

مرحله ۲: $y = 2 \pm \sqrt{4+y}$ $\quad R_{f^{-1}} = D_f = [2, +\infty)$

$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4+x}$ $\quad D_{f^{-1}} = [-4, +\infty)$

۵) اگر f و g وارون پذیر باشند:

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$



۶) اگر تابع f اص (ان) باشد، وارون آن نیز اص (ان) است.

۷) f وارون پذیر و فرد $\leftarrow$ f^{-1} فرد

$f: (x_1, y_1)(x_2, y_2)$

$(y_1, x_1)(y_2, x_2)$

۸) وارون چند ضابطه‌ای (با فرض ۱-۱ بودن)

مرحله ۱: هر ضابطه را وارون می‌کنیم

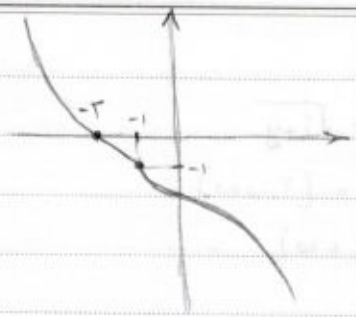
مرحله ۲: برد هر ضابطه f، دامنه ضابطه متناظر در f^{-1} است.

مثال) وارون پذیری $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \leq -2 \\ -2 - x & -2 < x < -1 \\ -x^3 - 2 & x \geq -1 \end{cases}$ را بررسی و در صورت وارون پذیری وارون آن را محاسبه کنید.

$f^{-1}(x) \begin{cases} -1 - \sqrt{1+x} & x \geq 0 \rightsquigarrow x^2 + 2x - y = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{1+y} \\ -2 - x & -1 < x < 0 \\ \sqrt[3]{-(x+2)} & x \leq -1 \end{cases}$

Subject

Date. Month. Year.



لگاریتم:

$0<a<1$ ا.ن

$a^x, a>1$ ا.ص

$f(x)=\log_a^x \longrightarrow a>0 \quad a\neq 1$

$D_f=\mathbb{R}^+ \quad R_f=\mathbb{R}$

مثال) $\log_3^x < \overset{\log_3^3}{1} \longrightarrow 0<x<3$

$\log_{\frac{1}{3}}^x < \overset{\log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}}{1} \longrightarrow x>\frac{1}{3}$

خواص: (همه خواص برای $\log_a^{x} \to x>0$ معتبر است.)

۱- $\log_a^{xy}=\log_a^x+\log_a^y$

۲- $\log_a^{\frac{x}{y}}=\log_a^x-\log_a^y$

Subject

Date. Month. Year.

۳- $a^{\log_a^x} = x$

۴- $\log_{a^\beta}^{x^\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}\log_a^x$ مثال: $\alpha=-1$ ، $\beta=1$ $\leftarrow$ $\log_a^{\frac{1}{x}} = -\log_a^x$

۵- $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

۶- $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ (معادل $\log_b^a \cdot \log_c^b = \log_c^a$)

۷- $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

۸- $\log_a^x < \log_a^{x_0} \Rightarrow \begin{cases} a>1 \rightarrow 0<x<x_0 \\ 0<a<1 \rightarrow x>x_0 \end{cases}$

۹- $\log_a^x > \log_a^{x_0} \Rightarrow \begin{cases} a>1 \rightarrow x>x_0 \\ 0<a<1 \rightarrow 0<x<x_0 \end{cases}$

جزء صحیح:

$[x]=k \longleftrightarrow k \leq x < k+1$

$\Rightarrow x = k+p \quad , k\in\mathbb{Z} \quad , \quad 0 \leq p < 1$

خواص:

۱) $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x\pm k] = [x] \pm k$

۲) $[x] \leq x < [x]+1$

۳) $0 \leq x-[x] < 1$

۴) $x-1 < [x] \leq x$

۵) $[x]+[y] \leq [x+y]$

۶) $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

۷) $[2x] = [x]+[x+\frac{1}{2}]$

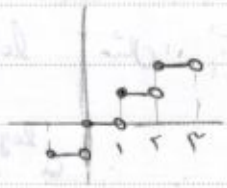
$[3x] = [x]+[x+\frac{1}{3}]+[x+\frac{2}{3}]$

Subject

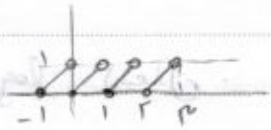
Date. Month. Year.

نمودارهای مهم:

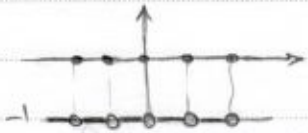
$y=[x]$



$y=x-[x]$



$y=[x]+[-x]$



مثال)

۱) دامنه $\sqrt{[x]+[-x]-x^2}$

۲) (کنکور ۸۸) $[x^{20}]=?$ $\Leftarrow$ $[x^2+x]=-1$

الف) ۱- ب) ۰ ج) ۱ د) ۲

۳) معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x]^2+[x]=12$ د) $[x]=2x-1$

ب) $[x]^2+[x]\leq 12$ هـ) $x[x]=41$

ج) $[2x]-[x+\frac{1}{2}]=3[x]-6$

۱- $x\in\mathbb{Z}$ $\sqrt{0-x^2}\rightarrow x=0$ $\quad$ $x\notin\mathbb{Z}$ $\sqrt{-1-x^2}$ ✗

۲- $[x^2+x]=-1\rightarrow -1\leq x^2+x<0$ $\quad$ $-2<x<0$

$0<x^2+x+1$ ✓ $\Rightarrow [x^{20}]=0$

$\Delta<0$

Subject

Date. Month. Year.

الف) $[x]^2+[x]=12 \qquad [x]=t \Rightarrow t^2+t-12=0$

$\Rightarrow t=3,-4 \Rightarrow \begin{cases} -4\leq x<-3 \\ 3\leq x<4 \end{cases}$

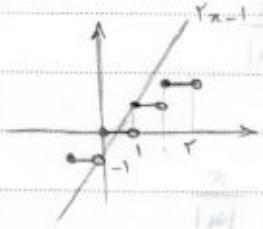
ب) $[x]^2+[x]\leq 12 \qquad [x]=y \Rightarrow y^2+y-12\leq 0$

$\Rightarrow -4\leq y\leq 3 \Rightarrow -4\leq x<4$

$[x]\leq 2 \rightarrow x<3 \qquad \geq 2 \rightarrow x\geq 2$

$<2 \rightarrow x<2 \qquad >2 \rightarrow x\geq 3$

د)



$x=k+2 \; ; \; k=2k+2p-1$

$k=1-2p$

$\rightarrow p=\frac{1-k}{2} \rightarrow 0\leq\frac{1-k}{2}<1$

$\rightarrow 0\leq 1-k<2 \rightarrow -1<k\leq 1$

$\left.\begin{array}{l} x=1/2 \leftarrow k=0 \rightarrow p=1/2 \\ x=1 \leftarrow k=1 \rightarrow p=0 \end{array}\right\} \Leftarrow$

ه)

$x>0 \xrightarrow{\text{اص}} 6\leq x<7 \rightarrow 6x=41 \Rightarrow x=\frac{41}{6}$

$x<0 \xrightarrow{\text{ن.ا}} -7\leq x<-6 \rightarrow -7x=41 \Rightarrow x=\frac{-41}{7}$ ✗

$x=k+p \Rightarrow (k+p)k=41 \Rightarrow p=\frac{41}{k}-k$

$0\leq \qquad <1$

Subject

Date. Month. Year.

تناوب: تابع f را متناوب گوییم هرگاه

$$\begin{cases} \forall x \in D_f : x+T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

* به کوچکترین $T>0$ (درصورت وجود) دوره تناوب اصلی (یا به اختصار دوره تناوب) گویند.

* از نظر هندسی، تابعی متناوب است که نمودار آن در امتداد محور xها به طور متوالی تکرار شود.

نکته:

$$\begin{cases} A\sin^{2k+1}(ax+b)+B \\ A\cos^{2k+1}(ax+b)+B \end{cases} \longrightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} A\sin^{2k}(ax+b)+B \\ A\cos^{2k}(ax+b)+B \end{cases} \longrightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} A\tan^{k}(ax+b)+B \\ A\cot^{k}(ax+b)+B \end{cases} \longrightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

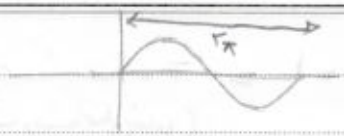
$$\begin{cases} ax-[ax] \\ [ax]+[-ax] \end{cases} \longrightarrow T=\frac{1}{|a|}$$

$$(-1)^{[ax]} \longrightarrow T=\frac{2}{|a|}$$

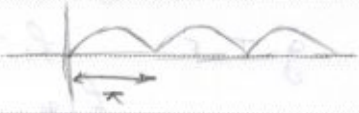
Subject

Date. Month. Year.

$\sin x \rightarrow T = 2\pi$



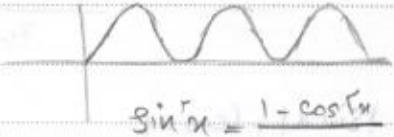
$\left.\begin{array}{l}|\sin x| \\ \sin^2 x\end{array}\right\} \rightarrow T = \pi$



$|\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$

$(\sin(x+\pi))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$

$\sin^3 x \rightarrow T = 2\pi$



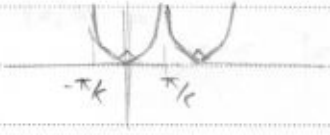
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\tan x$

$|\tan x|$

$\tan^2 x \Rightarrow T = \pi$

$\tan^3 x$



$\tan(x+\frac{\pi}{2}) = -\cot x$

قضیه: اگر توابع f و g متناوب و دارای تناوب اصلی T_f و T_g باشند به قسمی که α وجود داشته باشد که $T_f = m\alpha$, $T_g = n\alpha$ آنگاه $f \underset{\times}{\overset{\pm}{\div}} g$ متناوب است با دوره تناوب اصلی حداکثر $T' = [m,n]T$

توجه: $\underbrace{\sin^2 x}_{\pi} + \underbrace{(-1)^{[x]}}_{2} \rightarrow$ غیرمتناوب

تناوب f گویا

تناوب g گنگ

$f+g$ غیرمتناوب

SANA

Subject

Date. Month. Year.

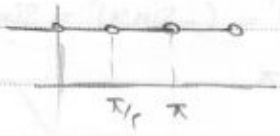
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow T =$ هر عدد مثبت

$\pi \qquad \pi$ (تناوب اصلی ندارد)

امتیازی: $g: T=2 \qquad f: T=4$

$f+g: \quad T=1$

$y = \tan x \cdot \cot x$

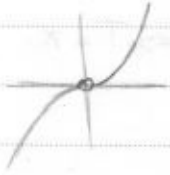


$T = \frac{\pi}{2}$

$f(x) = |\sin x| + |\cos x|$

$f(x+\frac{\pi}{2}) = |\cos x| + |-\sin x| = f(x)$

$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} = x|x|$



SANA